



Fuerzas y potenciales

R. O. Barrachina

La teoría de los resortes, aunque intentada por diversos matemáticos eminentes de esta época, hasta ahora no ha sido publicada por ninguno. Han pasado casi dieciocho años desde que yo la encontré, pero decidiendo aplicarla a algún caso particular¹, omití su publicación...

Tómese una cantidad de alambre de sección uniforme, ya sea de acero, hierro o latón y enrédese tal alambre sobre un cilindro formando una hélice de la longitud o número de vueltas que se desee, después fórmense lazos con los extremos, de uno de los cuales debe suspenderse esta bobina sobre un clavo y el otro sostenga el peso con que se hubiese distendido, y, colgando varias pesas, obsérvese exactamente a qué longitud cada una de las pesas se extiende más allá de longitud que su propio peso lo extiende y se encontrará que si una onza, o una libra o cierto peso lo extendió una línea, o una pulgada, o cierta longitud, entonces dos onzas, dos libras o dos pesas lo extenderán dos líneas, dos pulgadas o dos longitudes; y tres onzas, libras o pesas, tres líneas, pulgadas o longitudes y así sucesivamente. Y esta es la regla o ley de la naturaleza, sobre la cual todas las formas de movimiento de estiramiento o restitución proceden, ya sea de enrarecimiento, extensión, o condensación y compresión. Robert Hooke (1678).

1. Interacción elástica

El descubrimiento de la *fuerza de restitución* en 1678 dio muy justo renombre a Robert Hooke, quien al año siguiente ya se desempeñaba como secretario de la Royal Society. Decimos que dos partículas están en interacción elástica cuando la fuerza de interacción es $\mathbf{F} = -k(\mathbf{r} - r_o\hat{\mathbf{r}})$, donde $\mathbf{r}$

es el vector posición que ubica a la partícula sobre la cual actúa la fuerza respecto de la otra. La energía potencial correspondiente es

$$V(r) = \frac{1}{2}k(r - r_o)^2.$$



La constante de restitución k y la longitud propia (o de equilibrio) r_o son independientes de los dos cuerpos y sólo dependen del mecanismo particular de interacción. El resorte descrito por Hooke es sólo un ejemplo de interacción elástica. En dicho caso, esta ley lineal vale sólo dentro de ciertos límites, fuera de los cuales el resorte se deforma (límite de elasticidad). Esto vale también en muchas aplicaciones, donde la ley de Hooke es sólo una aproximación válida cerca de un punto de equilibrio estable. Un ejemplo más simple de esto se da en el estudio de moléculas diatómicas.

2. Moléculas diatómicas

Básicamente una molécula es un grupo de núcleos rodeados por electrones de tal manera que el conjunto es estable. Esta es una extensión natural del concepto de átomo, que es un núcleo rodeado por electrones. Cuando varios átomos se combinan para formar una molécula, los electrones en órbitas más cercanas al núcleo prácticamente no son perturbados. Sólo los electrones de valencia en órbitas más abiertas son afectados siendo, por lo tanto, responsables de la mayoría de las propiedades químicas de las moléculas.

En general, el origen de las ligaduras químicas no es algo que se pueda estudiar en el ámbito de la mecánica clásica². Sin entrar en mayores detalles, el resultado es que los carozos atómicos sienten una interacción atractiva, excepto a distancias muy cortas donde la repulsión entre los núcleos es preponderante. Como resultado de esta interacción se forma un mínimo de potencial, que hace energéticamente favorable que los núcleos de una molécula diatómica se mantengan ligados a una distancia de equilibrio r_o .

Una molécula puede emitir o absorber luz, variando su velocidad de rotación alrededor de su centro de masa. La forma en que haga esto depende de la distancia *media* de equilibrio r_o . Por lo tanto, esta distancia de equilibrio puede obtenerse a partir de mediciones de procesos de absorción y emisión de luz por gases, resultando estar entre 1 y 7 unidades atómicas, aproximadamente; donde la unidad atómica de longitud está definida por el radio de la órbita del electrón en el átomo de Hidrógeno, 5.3×10^{-9} cm.

Por otra parte los núcleos pueden oscilar alrededor de sus posiciones relativas de equilibrio. En este caso, podemos aproximar a la energía potencial de la molécula, cerca de su separación de equilibrio r_o , por un potencial armónico $V(r) \approx k(r - r_o)^2/2$, con frecuencias características de oscilación $\omega_o = \sqrt{k/\mu}$. Experimentalmente se encuentra que estas frecuencias van de 1×10^{14} Hz para el Cl_2 hasta 8.1×10^{14} Hz para el H_2 , es decir en el rango infrarrojo.

3. Fuerzas centrales conservativas

Las fuerzas electrostática, gravitatoria y elástica comparten dos propiedades muy importantes. En primer lugar son *centrales*, es decir que actúan sobre la misma dirección del vector posición

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \dots, t) = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \dots, t) \hat{\mathbf{r}}.$$

Por otro lado son conservativa. Con esto último queremos decir que existe una función $V(\mathbf{r})$ llamada *energía potencial*, tal que

$$f = -\frac{\partial V}{\partial r}.$$

A continuación veremos una serie de leyes de fuerza conservativas no centrales.

4. Momento dipolar

Advertencia: Los temas que se desarrollan a continuación superan el nivel de conocimiento requerido para ingresar al Instituto Balseiro. Sin embargo, su lectura puede resultar formativa y la matemática que se requiere no debería estar fuera del alcance de estudiantes que hayan completado un segundo año de física o ingeniería.

Supongamos que acercamos dos cargas iguales y opuestas q_1 y $-q_1$ hasta una distancia $\mathbf{a}$. Si ubicamos otra carga q a una distancia $\mathbf{r}$ respecto del



centro de masa de dicho par, la energía potencial del sistema es

$$V = \beta_o \left(\frac{q q_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}/2|} - \frac{q q_1}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}/2|} + \frac{q_1^2}{a} \right).$$

El último término es constante, y por lo tanto podemos eliminarlo redefiniendo el cero de energía

$$V = \beta_o q q_1 \left(\frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}/2|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}/2|} \right).$$

Ahora supondremos que $a \ll r$, de manera tal que podemos desarrollar en términos de r/a ,

$$\frac{1}{|\mathbf{r} \pm \mathbf{a}/2|} = \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\mp 1)^\ell \left(\frac{a}{2r} \right)^\ell P_\ell(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}}),$$

donde P_ℓ son los polinomios de Legendre. Los primeros polinomios de la serie son

$$\begin{aligned} P_0(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}}) &= 1 \\ P_1(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}}) &= \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}} \\ P_2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}}) &= \frac{1}{2} (3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}})^2 - 1) \\ P_3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}}) &= \frac{1}{2} (5(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}})^3 - 3\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}}) \\ &\dots \end{aligned}$$

de manera tal que

$$\frac{1}{|\mathbf{r} \pm \mathbf{a}/2|} = \frac{1}{r} \mp \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{2r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})^2 - a^2 r^2}{8r^5} + \dots,$$

y, por lo tanto,

$$V = \beta_o q q_1 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}}{r^3} + \dots$$

Esta energía potencial se denomina “dipolar”, y se suele escribir en términos del *momento dipolar* $\mathbf{b} = q_1 \mathbf{a}$, de manera tal que

$$V_{\text{dipolar}} = \beta_o q \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^3}.$$

Para calcular la fuerza utilizamos que $\nabla r^n = n r^{n-1} \hat{\mathbf{r}}$ y $\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{d}$, con lo cual

$$\mathbf{F}_{\text{dipolar}} = -\nabla V_{\text{dipolar}} = \frac{\beta_o q}{r^5} (2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{r} - r^2 \mathbf{d}).$$

5. Momento cuadrupolar

Podemos repetir el proceso anterior, poniendo ahora dos dipolos opuestos $\mathbf{d}$ y $-\mathbf{d}$ a una distancia relativa $\mathbf{a}$. Si ubicamos una carga q a una distancia $\mathbf{r}$ ($r \gg a$) respecto del centro de masa de dicho par, la energía potencial del sistema es

$$\begin{aligned} V_{\text{cuadrupolar}} &= \beta_o q \mathbf{d} \cdot \left(\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{a}/2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}/2|^3} - \frac{(\mathbf{r} + \mathbf{a}/2)}{|\mathbf{r} + \mathbf{a}/2|^3} \right) \\ &= \beta_o q \mathbf{d} \cdot \left[(\mathbf{r} - \mathbf{a}/2) \left(\frac{1}{r^3} + \frac{3}{2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^5} \right) \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{r} + \mathbf{a}/2) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^5} \right) \right] + \dots \\ &= \beta_o q \frac{3(\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{a}) r^2}{r^5} + \dots \end{aligned}$$

Obtenemos así el *potencial cuadrupolar*³

$$V_{\text{cuadrupolar}} = \frac{\beta_o q}{2r^5} (\mathbf{r}^t \cdot \mathcal{E} \cdot \mathbf{r}),$$

donde el supraíndice t indica la operación de trasposición. Hemos definido el *tensor momento cuadrupolar*

$$\mathcal{E} = \text{Traza}(\mathcal{I}) - 3\mathcal{I},$$

con $\mathcal{I}$ un tensor de elementos

$$I_{ij} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{a} \delta_{ij} - (\mathbf{d} \cdot \hat{x}_i)(\mathbf{a} \cdot \hat{x}_j).$$



Utilizando la ecuación $\nabla(\mathbf{r}^t \cdot \mathcal{E} \cdot \mathbf{r}) = 2\mathcal{E} \cdot \mathbf{r}$ obtenemos la fuerza

$$\mathbf{F}_{\text{cuadrupolar}} = -\nabla V_{\text{cuadrupolar}} = -\frac{\beta_o q}{r^4} \left(\mathcal{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} - \frac{5}{2} (\hat{\mathbf{r}}^t \cdot \mathcal{E} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \right) .$$

En el caso particular donde los dipolos se orientan paralelos a la distancia $\mathbf{a}$, y reorientando el sistema de coordenadas de manera que $\mathbf{a}$ y $\mathbf{d}$ sean paralelos a $\hat{z}$, la matriz I_{ij} es diagonal, con $I_{xx} = I_{yy} = da$ y $I_{zz} = 2da$. Resulta, entonces,

$$\mathcal{E} \cdot \mathbf{r} = -a \left(3(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{d}}) \mathbf{d} - d\mathbf{r} \right) ,$$

con lo cual

$$\mathbf{F}_{\text{cuadrupolar}} = \frac{3}{2} \beta_o q da \frac{2(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{d}}) \hat{\mathbf{d}} + (1 - 5(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{d}})^2) \mathbf{r}}{r^5} .$$

El potencial correspondiente se escribe

$$V_{\text{cuadrupolar}} = \beta_o q da \frac{3(\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 - 1}{r^3} .$$

6. Potenciales dipolar atómico y de polarización

Consideremos la interacción entre una partícula de carga q y un átomo neutro de número atómico Z . Si el átomo tiene un momento dipolar permanente $\mathbf{d}$ entonces la interacción a grandes distancias está dada por

$$V(r) \approx \beta_o q \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^3} + O(r^{-3}) .$$

Pero, aún cuando el átomo no presente un momento dipolar permanente, puede generarse una interacción debida a un efecto de polarización de su distribución de carga. De hecho, la proximidad de la carga q altera las órbitas de los electrones en el átomo, dando lugar a una fuerza entre ambos que, para el caso de un átomo de hidrógeno y a grandes distancias, corresponde a una energía potencial con una ley

$$V(r) = -\beta \frac{q}{r^2} .$$

El signo y la magnitud de la constante β depende de las características de la órbita donde se mueve el electrón.

7. Interacción de polarizabilidad

La ley de fuerza anterior se da sólo para el hidrógeno, debido a sus peculiares propiedades de simetría. Para cualquier otro átomo neutro de polarizabilidad γ , el campo eléctrico $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/r^3$ debido a una carga q genera un momento dipolar inducido $\mathbf{d} = \gamma\mathbf{E}$. Por lo tanto, la fuerza entre el átomo y la carga q es, a grandes distancias,

$$\mathbf{F} \approx -2\beta_o q \frac{\mathbf{d}}{r^3} = -2\beta_o q^2 \gamma \frac{\mathbf{r}}{r^6} .$$

Y la energía potencial es

$$V = -\beta_o \frac{\gamma q^2}{2r^4} ; .$$

En general⁴, los átomos de gases nobles presentan valores de polarizabilidad relativamente pequeños, del orden de $\alpha \approx 1.38$ unidades atómicas para el helio y 11.07 u.a. para el Argón. Sin embargo, si se los “excita”, llevando uno de sus electrones a una órbita más abierta, este se vuelve muy *vulnerable* a la interacción con cargas externas, y se produce un dramático incremento de la polarizabilidad (aproximadamente 315 u.a. para el He(2^3S), 800 u.a. para el He(2^1S) y 320 u.a. para el Ar(3^3P_2)). Comparativamente, la polarizabilidad de los átomos alcalinos, debido a la presencia del electrón de valencia, toma valores en dicho rango; aproximadamente 160 u.a. para el Sodio y 300 u.a. para el Potasio. La excitación también produce un aumento de la polarizabilidad, pero en una magnitud menor que para los gases nobles (2950 u.a. para Na($4s$), 360 u.a. para Na($3p$), 4600 u.a. para K($5s$), 630 u.a. para K($4p$)).

Este tipo de interacción fue ampliamente estudiada por Paul Langevin en 1905, en relación con la difusión mutua de una mezcla de gases⁵



8. Potencial de Maxwell

Una ley de fuerza con una dependencia con la distancia similar a la del potencial de polarizabilidad, pero suponiendo una interacción repulsiva, fue estudiada por Maxwell en el siglo pasado⁶. El interés de Maxwell por una energía potencial de la forma

$$V(r) = Z/r^4 \quad \text{con} \quad Z > 0 ,$$

no se debió al estudio de ningún problema concreto, sino a motivos puramente prácticos relacionados con los muy difíciles cálculos que se presentan en la teoría cinética de gases. Este tipo de interacción tiene una muy extraña propiedad: el *tiempo de colisión*, es decir el tiempo medio que transcurre entre colisión y colisión para una partícula cualquiera del gas, es independiente de su velocidad. Esta propiedad es de gran utilidad en la teoría cinética de gases, ya que simplifica enormemente el cálculo de las propiedades de transporte.

9. Interacción de London

Si analizamos la interacción entre dos átomos neutros y sin momentos dipolares permanentes, la interacción interatómica se establece por la inducción mutua de momentos multipolares. Este efecto fue predicho y estudiado por F. London⁷ en 1930. Por medio de un tratamiento perturbativo de segundo orden se obtiene

$$V(r) = -\frac{Z_{VW}}{r^6} + O(r^{-7}) ,$$

donde Z_{VW} es el denominado “coeficiente de Van der Waals”, con valores que van desde 1.4 unidades atómicas (para He + He) hasta 62 unidades atómicas (para Ar + Ar).

10. Campo gravitatorio o electrostático de un objeto extenso

Consideremos ahora una distribución de cargas q_i ubicadas en posiciones fijas $\mathbf{a}_i$ respecto de un punto O. Si ubicamos una carga q a una distancia $\mathbf{r}$ respecto de O, la energía potencial (renormalizada) es

$$V = \beta_o q \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}_i|} .$$

Si bien estaremos discutiendo el caso de una interacción electrostática, los mismos resultados se pueden aplicar al caso gravitatorio reemplazando β_o por la constante de gravitación universal $-\alpha_o$ y q_i por las masas m_i .

Supongamos ahora que $r \gg a_i \forall i$. Repitiendo los pasos dados en las dos secciones anteriores, podemos escribir el siguiente desarrollo

$$V = \beta_o q \left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^3} + \dots \right) ,$$

donde

$$Q = \sum_i q_i$$

es la carga total del sistema, y

$$\mathbf{d}_O = \sum_i q_i \mathbf{a}_i$$

es el momento dipolar. Evidentemente, la carga total no varía si trasladamos el punto O a otro O' separado del primero por una distancia $\mathbf{R}$. En cambio, el momento dipolar se modifica en

$$\mathbf{d}_{O'} = \sum_i q_i (\mathbf{a}_i - \mathbf{R}) = \mathbf{d}_O - Q \mathbf{R} .$$

Vemos que si la carga total es distinta de cero, entonces siempre podemos anular el momento dipolar si elegimos el origen en el *centro de carga* $\mathbf{R} = \mathbf{d}_O/Q$. Evidentemente, todo lo dicho hasta ahora en esta sección se aplica a una distribución de partículas en cuanto a la interacción gravitatoria. En dicho caso, puesto que no es posible anular la masa total, siempre es



posible anular el momento dipolar eligiendo el origen en el centro de masa. En el caso electrostático, en cambio, la carga total puede ser nula, y en dicho caso el momento dipolar es independiente de la elección del origen. Esto es justamente lo que pasa con el dipolo eléctrico, donde $\mathbf{d}_{O'} = \mathbf{d}_O$.

Si continuamos con el desarrollo anterior, nos encontramos con un término cuadrupolar dado por

$$\begin{aligned} V_{\text{cuadrupolar}} &= \beta_o q \sum_i q_i \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_i)^2 - r^2 a_i^2}{2r^5} \\ &= \frac{\beta_o q}{2r^5} (\mathbf{r}^t \cdot \mathcal{E} \cdot \mathbf{r}) , \end{aligned}$$

donde el *tensor cuadrupolar* $\mathcal{E} = \text{Traza}(\mathcal{I}) - 3\mathcal{I}$ está definido a partir del tensor $\mathcal{I}$ de elementos

$$I_{ij} = \sum_i q_i \left(a_i^2 \delta_{ij} - (\mathbf{a}_i \cdot \hat{x}_i)(\mathbf{a}_i \cdot \hat{x}_j) \right) .$$

En el caso de una interacción gravitatoria, $\mathcal{I}$ se denomina *tensor de inercia*, “artefacto” matemático muy utilizado en relación con el movimiento de los cuerpos rígidos.

La energía potencial es, entonces,

$$V = \frac{\beta_o q}{r} \left(Q + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}}{r^2} + \frac{\mathbf{r}^t \cdot \mathcal{E} \cdot \mathbf{r}}{2r^4} + \dots \right) .$$

Con la ayuda de las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla r^n &= n r^{n-1} \hat{\mathbf{r}} \\ \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{d}) &= \mathbf{d} \\ \nabla\left(\frac{1}{2} \mathbf{r}^t \cdot \mathcal{E} \cdot \mathbf{r}\right) &= \mathcal{E} \cdot \mathbf{r} , \end{aligned}$$

obtenemos la fuerza $\mathbf{F} = -\nabla V$

$$\mathbf{F} = \frac{\beta_o q}{r^2} \left[Q \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} (3 \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{d}) - \frac{1}{r^2} \left(\mathcal{E} \cdot \hat{\mathbf{r}} - \frac{5}{2} (\hat{\mathbf{r}}^t \cdot \mathcal{E} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{r}} \right) + \dots \right] .$$

11. Distribución de carga con simetría axial

Cuando la distribución de carga es continua y con simetría axial, podemos reorientar el sistema de coordenadas de manera de hacer coincidir el eje z con el eje de simetría. En este caso, el momento dipolar apunta necesariamente en dicha dirección, $\mathbf{d} = d\hat{z}$. Por otra parte, el tensor de inercia es diagonal y con $I_{xx} = I_{yy}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{r}^t \cdot \mathcal{E} \cdot \mathbf{r} &= r^2 (2I_{xx} + I_{zz}) - 3 \left((x^2 + y^2)I_{xx} + z^2 I_{zz} \right) \\ &= (2z^2 - x^2 - y^2)I_{xx} + (x^2 + y^2 - 2z^2)I_{zz} \\ &= (I_{xx} - I_{zz}) (2z^2 - x^2 - y^2) \\ &= (I_{xx} - I_{zz}) \left(3(\mathbf{r} \cdot \hat{z})^2 - r^2 \right) , \end{aligned}$$

y con ello

$$V_{\text{cuadrupolar}} = \frac{\beta_o q}{2r^5} \mathbf{r}^t \cdot \mathcal{E} \cdot \mathbf{r} = \frac{\beta_o q}{2r^3} (I_{xx} - I_{zz}) \left(3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{z})^2 - 1 \right) .$$

Esta última expresión es idéntica a la obtenida en una sección anterior para un cuadrupolo formado por dos dipolos alineados. Se suelen definir los parámetros adimensionales

$$J_1 = -\frac{d}{Qa} \quad J_2 = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{Qa^2} ,$$

donde a es una dimensión característica del sistema, de manera tal que

$$V = \frac{\beta_o q Q}{r} \left(1 - J_1 \frac{a}{r} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{z} - J_2 \frac{a^2}{r^2} \frac{3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{z})^2 - 1}{2} + \dots \right) ; .$$

En general, para un cuerpo asimétrico, el efecto de los *armónicos* de orden superior al cuadrupolar puede encontrarse sin dificultad, en tanto que el desarrollo de $|\mathbf{r} \pm \mathbf{a}/2|^{-1}$ en polinomios de Legendre puede integrarse para dar

$$V(r) = -\frac{\beta_o q Q}{r} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{a}{r} \right)^n P_n(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{a}}) ,$$



donde $J_0 = -1$. Así como el coeficiente J_2 está relacionado con el achatamiento o estiramiento del cuerpo a lo largo del eje de simetría, J_3 mide una deformación en forma de "pera". Los valores sucesivos de estos parámetros para el caso del campo gravitatorio terrestre son

$$\begin{aligned} J_2 &\approx +1.1 \times 10^{-3} \\ J_3 &\approx -2.5 \times 10^{-6} \\ J_4 &\approx -1.6 \times 10^{-6} \\ J_5 &\approx -0.2 \times 10^{-6} . \end{aligned}$$

La conclusión de esta sección es que al analizar la interacción (gravitatoria o electrostática) de una partícula con un sistema lejano, se puede lograr una mejor aproximación si junto con la consideración de una carga o masa puntual, se incorporan correcciones dipolares, cuadrupolares o de orden superior.

12. La forma de la Tierra

La situación de simetría axial es de interés en el caso de la atracción gravitatoria de la Tierra, cuya forma es aproximadamente la de una esfera achatada en los polos. De hecho, J_2 da una medida de dicho achatamiento. Si consideramos una distribución de masa con forma *prolada*, es decir más larga en la dirección z que ancha, entonces J_2 es negativo. Si el sistema es *oblado*, y tal es el caso de la Tierra, J_2 es positivo. En general, para un *esferoide* (elipsoide de revolución) homogéneo con semiejes a , a y c ,

$$J_2 = -\frac{c^2 - a^2}{5a^2} .$$

La Tierra es aproximadamente un esferoide oblado cuyo radio ecuatorial, $a \approx 6370$ km, excede al radio polar c en aproximadamente 21.4 km. Si la Tierra fuese homogénea podríamos caracterizar esta diferencia a través del valor de J_2 anterior

$$J_2 = -\frac{c^2 - a^2}{5a^2} \approx -\frac{2(c - a)}{5a} \approx \frac{2}{5}\epsilon \quad \text{con} \quad \epsilon = \frac{a - c}{a} .$$

Sin embargo, la Tierra es considerablemente más densa en el centro, por lo cual J_2 es algo menor que el valor anterior.

La energía potencial gravitatoria de una partícula de masa m es, entonces,

$$V(r) = -\frac{\alpha_o m M}{r} \left(1 - J_2 \frac{a^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) ,$$

donde M es la masa total de la Tierra. Como veremos a continuación, tanto J_2 como ϵ pueden determinarse por medio de medidas terrestres de la aceleración de la gravedad y el uso de un principio de equilibrio.

El achatamiento de la Tierra es una consecuencia de su rotación. En un muy largo período de tiempo, la Tierra se ha deformado plásticamente, actuando más como un líquido viscoso que como un sólido rígido, hasta alcanzar un equilibrio entre la fuerza de gravedad y la fuerza centrífuga. La energía potencial de un elemento de masa m a una distancia r del centro de la Tierra es

$$V(r) = -\frac{\alpha_o m M}{r} \left(1 - J_2 \frac{a^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right) - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \sin^2 \theta .$$

En equilibrio, la superficie de la Tierra debe ser una equipotencial⁸, $V = \text{constante}$. Igualando los valores en el polo ($\theta = 0$) y el ecuador ($\theta = \pi/2$), obtenemos

$$-\frac{\alpha_o m M}{c} \left(1 - J_2 \frac{a^2}{c^2} \right) = -\frac{\alpha_o m M}{a} \left(1 + \frac{1}{2} J_2 \right) - \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 ,$$

o sea

$$\frac{1}{2} \omega^2 a^2 = \frac{\alpha_o M}{a} \left(\epsilon - \frac{1}{2} J_2 - J_2 \frac{a^3}{c^3} \right) \approx \frac{\alpha_o M}{a} \left(\epsilon - \frac{3}{2} J_2 \right) .$$

Obtenemos así la siguiente ecuación que relaciona J_2 y ϵ ,

$$\omega^2 a = g_o (2\epsilon - 3 J_2) ,$$



$$\epsilon = \frac{3}{2} J_2 + \frac{\omega^2 a}{g_o} ,$$

donde hemos definido la aceleración “normalizada” $g_o = \alpha_o M/a^2$. Para poder obtener ϵ y J_2 necesitamos otra relación. Para ello recurrimos a mediciones de la aceleración de la gravedad en los polos y en el ecuador,

$$\begin{aligned} g_{\text{polo}} &= \frac{\alpha_o M}{c^2} \left(1 - 3 \frac{a^2}{c^2} J_2 \right) \approx g_o (1 + 2\epsilon - 3J_2) , \\ g_{\text{ecuador}} &= \frac{\alpha_o M}{a^2} \left(1 + \frac{3}{2} J_2 \right) - \omega^2 a = g_o \left(1 + \frac{3}{2} J_2 \right) - g_o (2\epsilon - 3J_2) , \\ &= g_o \left(1 - 2\epsilon + \frac{9}{2} J_2 \right) . \end{aligned}$$

Mediciones gravimétricas arrojan los siguientes valores

$$\begin{aligned} g_{\text{polo}} &= 983.217 \text{ cm/seg}^2 \\ g_{\text{ecuador}} &= 978.039 \text{ cm/seg}^2 . \end{aligned}$$

Por otra parte, el radio ecuatorial de la Tierra es $a = 6378160 \pm 40\text{m}$ y el día sideral es de $24 \times 60 \times 60\text{seg}$. Obtenemos así

$$\begin{aligned} \epsilon &\approx 0.003376 \\ J_2 &\approx 0.001095 \end{aligned}$$

que están en buen acuerdo con mediciones directas obtenidas desde satélites. Tal como esperábamos, J_2 es algo menor que $2\epsilon/5$.

13. Orbitas satelitales

La fuerza ejercida por la Tierra sobre un satélite de masa m es

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{\alpha_o m M}{r^2} \left[\hat{\mathbf{r}} + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \left(2(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}}) \hat{\mathbf{z}} + (1 - 5(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}})^2) \hat{\mathbf{r}} \right) \right] \\ &= -\frac{\alpha_o m M}{r^2} \left[\hat{\mathbf{r}} + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{1}{r^3} \left(2r^2 z \hat{\mathbf{z}} + (r^2 - 5z^2) \mathbf{r} \right) \right] . \end{aligned}$$

El término cuadrupolar afecta la órbita del satélite. En primer lugar, debido al apartamiento que produce respecto de la ley de cuadrado inverso, genera una precesión del eje mayor de la órbita. Esta precesión es hacia adelante para órbitas con pequeña inclinación respecto del plano ecuatorial, y en dirección retrógrada si la inclinación es superior a $\arcsin(\sqrt{4/5}) = 63.4^\circ$. Esta diferencia es un reflejo del cambio de signo del término cuadrupolar. Otro efecto es que la fuerza ya no es central, y se genera una precesión retrógrada del plano orbital alrededor del eje terrestre, que disminuye al aumentar la inclinación, anulándose para órbitas transpolares. Ambos efectos son fuertemente dependientes del radio de la órbita. El efecto de la forma de la Tierra sobre la Luna es de unos pocos segundos de arco por año, contra los 19° que produce el campo gravitatorio del sol.

14. Mareas

Una fuerza gravitatoria o electrostática no uniforme actuando sobre un cuerpo genera tensiones internas denominadas “fuerzas tidales”. Un ejemplo muy conocido de este efecto está dado por las mareas producidas en los océanos de la Tierra por acción de la Luna. Consideremos una partícula de masa m en una posición $\mathbf{a}$ de la superficie terrestre, la energía potencial correspondiente a su interacción con la Luna (de masa M_L y ubicada a una distancia $\mathbf{R}_L$ del centro de la Tierra) es

$$V_L = -\frac{\alpha_o m M_L}{|\mathbf{a} - \mathbf{R}_L|} ,$$

que desarrollando en potencias de a/R_L obtenemos

$$\begin{aligned} V_L &= -\frac{\alpha_o m M_L}{R_L} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{a}{R_L} \right)^\ell P_\ell(\hat{\mathbf{R}}_L \cdot \hat{\mathbf{a}}) \\ &\approx -\frac{\alpha_o m M_L}{R_L} \left(1 + \frac{a}{R_L} \hat{\mathbf{R}}_L \cdot \hat{\mathbf{a}} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{R_L} \right)^2 (3(\hat{\mathbf{R}}_L \cdot \hat{\mathbf{a}})^2 - 1) + \dots \right) . \end{aligned}$$



El primer término es constante, y no da lugar a ninguna fuerza. El término lineal $\alpha_o m M_L z / R_L^2$ da lugar a una aceleración gravitatoria uniforme $\alpha_o m M_L / R_L^2$ en dirección hacia la Luna. Este término describe el principal efecto de la fuerza gravitatoria, que es acelerar el sistema Tierra-Luna en su movimiento orbital alrededor del centro de masa común, y es irrelevante para el fenómeno de las mareas que estamos analizando. Podemos eliminarlo pasando a un sistema no inercial que rote solidariamente con el sistema Tierra-Luna. Queda sólo el término cuadrático en a , de naturaleza cuadrupolar, equivalente a la presencia de un campo gravitatorio,

$$\mathbf{g}_L = -\frac{1}{m} \nabla V = \frac{\alpha_o M_L}{R_L^5} \left(3(\mathbf{a} \cdot \mathbf{R}_L) \mathbf{R}_L - R_L^2 \mathbf{a} \right).$$

Vemos que esta fuerza produce un efecto de *tensión* en la dirección Tierra-Luna, y de *compresión* en la dirección perpendicular.

Puede resultar sorprendente la simetría de la fuerza tidal, en particular que en el punto más cercano a la Luna sea idéntica en magnitud que en el punto más alejado.

La fuerza tiene una componente tangencial, que tiende a empujar el agua del mar hacia el eje del sistema Tierra-Luna, produciendo dos puntos de marea alta. Puesto que el eje de rotación de la Tierra es aproximadamente perpendicular al plano orbital Tierra-Luna, los “bultos” tidales recorren la superficie terrestre con un período de aproximadamente 12 horas como mareas *semi - diurnas*.

Podemos comparar la aceleración producida por la mareas, $g_L \approx \alpha_o M_L a / R_L^3$, con la aceleración terrestre $g_o \approx \alpha_o M_T / a^2$. Siendo que $M_T / M_L \approx 81.3$ y $R_L / a \approx 60.3$, obtenemos

$$\frac{g_L}{g_o} \approx 5.60 \times 10^{-8}.$$

Comparativamente, la marea producida por la acción del Sol es

$$\begin{aligned} \frac{g_S}{g_o} &= \frac{\alpha_o M_S a / R_S^3}{\alpha_o M_T / a^2} \approx \left(\frac{M_S}{M_T} \right) \times \left(\frac{R_T}{R_S} \right)^3 = (3.33 \times 10^5) \times (4.26 \times 10^{-5}) \\ &\approx 2.57 \times 10^{-8}. \end{aligned}$$

Por una sorprendente coincidencia, única en todo el sistema solar, las fuerza tidales del sol y la luna son de igual orden de magnitud. Esto hace que en Luna nueva y Luna llena, puesto que la Luna y el Sol actúan sobre la misma dirección, las mareas son especialmente pronunciadas. Estas son las *mareas vivas*. Por otra parte, en los cuartos creciente y decreciente, cuando la luna y el sol forman un ángulo recto, sus efectos se cancelan parcialmente, produciéndose las llamadas *mareas muertas*.

Para tener una idea de la magnitud del efecto, podemos considerar que la superficie del agua sobre la Tierra debe formar una equipotencial. Para calcular la variación h respecto del nivel de equilibrio, escribimos

$$g_o h = \frac{\alpha_o M_L}{2 R_L} \left(\frac{a}{R_L} \right)^2 \left(3 (\hat{\mathbf{R}}_L \cdot \hat{\mathbf{a}})^2 - 1 \right)$$

o sea,

$$h \approx a \frac{g_L}{g_o} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right).$$

Usando que $a \approx 6370 \text{ km}$, obtenemos que la altura máxima de la marea es de apenas $h_{\max} \approx 0.36 \text{ m}$. Una cuenta similar realizada para el efecto solar, produce una marea de $h_{\max} \approx 0.16 \text{ m}$. Estos valores aproximados pueden parecer excesivamente pequeños. Sin embargo, están muy de acuerdo con la magnitud de las mareas en alta mar. En zonas menos profundas, en cambio, son fuertemente dependientes de la topografía local. Además pueden producirse fenómenos de resonancia, dependiendo de los períodos naturales de oscilación de las masas de agua. Según sea la forma, tamaño y profundidad de una zona costera, pueden producirse mareas excepcionalmente altas. Por ejemplo, la marea que se produce en la desembocadura del Río Negro es de una amplitud media de 3.5 metros, o sea cien veces mayor a la estimación anterior, introduciendo una masa de agua salada dentro del cauce de Río hasta aproximadamente 10 kilómetros aguas arriba. Este efecto se observa hasta aproximadamente el kilómetro 65 donde dicha influencia deja de percibirse.



15. Estabilidad de la órbita lunar

La disipación de energía por acción de las mareas tiene el efecto de frenar gradualmente la rotación terrestre. A medida que la Tierra gira sobre su eje intenta arrastrar consigo los bultos de las mareas, mientras que la Luna empuja para mantenerlas alineadas con el eje Tierra-Luna. De esta manera se genera una cupla que actúa en contra de la rotación terrestre. Tal como se discute en otro apunte de esta serie, el impulso angular de la Tierra es $L_T = I_T \omega_T$ donde I_T es el denominado *momento de inercia*. Para un cuerpo esférico homogéneo de masa M_T y radio a esta cantidad es igual a $I = 2M_T a^2/5$. Sin embargo, como la densidad de la Tierra es mayor en el centro que en la superficie, I_T es algo menor que esta cantidad, aproximadamente $I_T = 0.33M_T a^2$. Despreciando el momento angular de la Luna, que de hecho es comparativamente muy pequeño, el momento angular total del sistema, suponiendo que los ejes de rotación están alineados, es aproximadamente igual a

$$L = \mu_{TL} R^2 \omega_{TL} + 0.33M_T a^2 \omega_T ,$$

donde ω_{TL} es la velocidad angular orbital de la Luna. Puesto que la masa reducida del sistema Tierra-Luna es $\mu_{TL} \approx M_T/82.3$, tenemos que

$$\frac{L}{\mu_{TL} a^2} = \left(\frac{R}{a}\right)^2 \omega_{TL} + 27.2 \omega_T .$$

En la actualidad ($t = 0$), siendo $R(0)/a = 60.3$ y $\omega_T(0)/\omega_{TL}(0) = 27.4$, obtenemos que

$$160 \approx \left(\frac{R}{a}\right)^2 \frac{\omega_{TL}}{\omega_T(0)} + 27.2 \frac{\omega_T}{\omega_T(0)} .$$

Adviértase además que en este momento el primer término es cinco veces superior al segundo. Por la tercera ley de Kepler, la velocidad angular orbital está relacionada con el radio de la órbita lunar por $\omega_{TL}^2 R^3 = \alpha_o M_T$, con lo cual,

$$\frac{\omega_{TL}(t)}{\omega_T(0)} = \frac{\sqrt{\alpha_o M_T}/R^{3/2}}{\omega_T(0)} = 27.4 \frac{\sqrt{\alpha_o M_T}/R^{3/2}}{\omega_{TL}(0)}$$

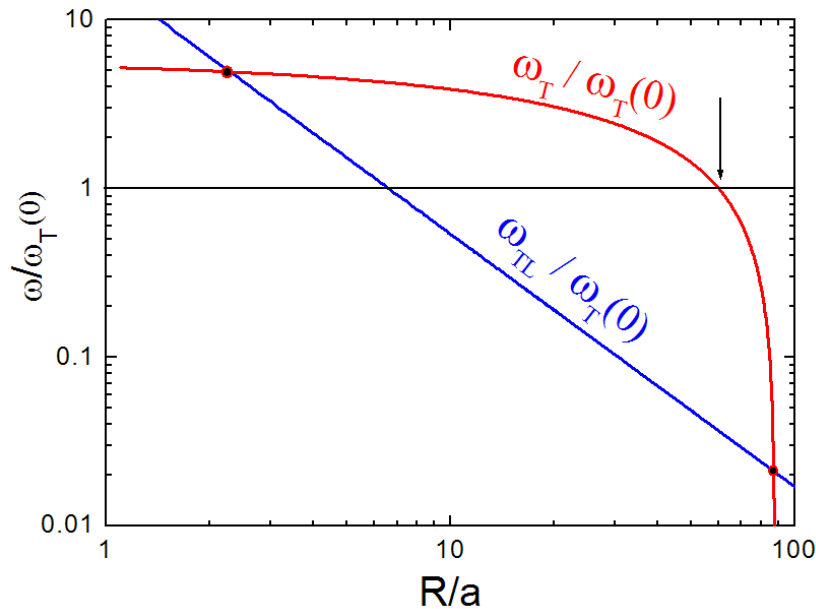
$$\begin{aligned} &= 27.4 \left(\frac{R(0)}{R(t)}\right)^{3/2} = 27.4 \left(\frac{a/60.3}{R(t)}\right)^{3/2} \\ &= 17.1 \left(\frac{a}{R(t)}\right)^{3/2} . \end{aligned}$$

Reemplazando en una ecuación anterior, obtenemos las siguientes expresiones para la velocidad angular de la Tierra ω_T y para la velocidad angular orbital de la Luna ω_{TL} ,

$$\begin{aligned} \frac{\omega_T}{\omega_T(0)} &= 5.88 - 0.629 \left(\frac{R}{a}\right)^{1/2} \\ \frac{\omega_{TL}}{\omega_T(0)} &= 17.1 \left(\frac{R}{a}\right)^{-3/2} . \end{aligned}$$

Vemos que a medida que ω_T decrece por la fricción de las mareas, la distancia Tierra-Luna R debe crecer. Y simultáneamente también debe decrecer la velocidad angular orbital ω_{TL} . Si graficamos ambas curvas, vemos que hay dos puntos de cruce. Dichos puntos corresponden a estados de equilibrio, donde ambas velocidades angulares son iguales, y ya no habría fricción por mareas. En tales casos, la Tierra mostraría siempre la misma cara hacia la Luna, tal como hace la Luna actualmente con la Tierra; y el día terrestre y el mes lunar tendrían la misma duración. El primer punto corresponde a $R \approx 2.3a$, con el día terrestre de menos de 5 horas. Sin embargo, esta situación sería inalcanzable, puesto que R estaría por debajo del *límite de Roche*, por debajo del cual las fuerzas tidales serían tan intensas que despedazarían la Luna.



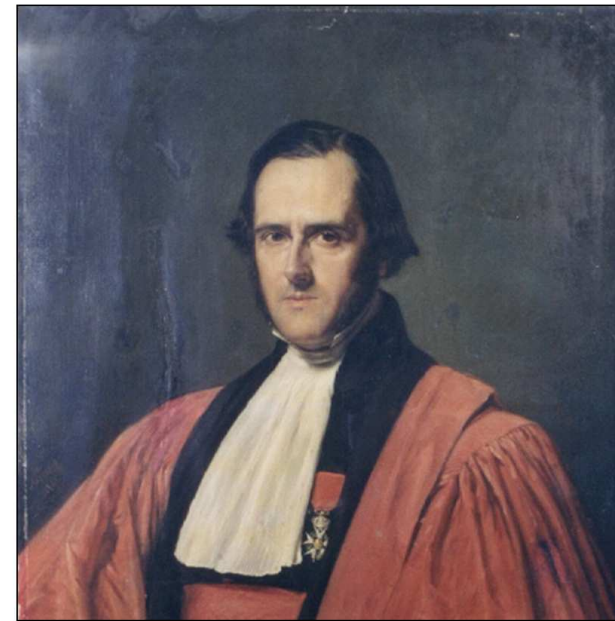


Relación entre las velocidades angulares de rotación de la Luna alrededor de la Tierra ω_{TL} y de esta sobre su eje ω_T , como función del radio R de la órbita lunar. a es el radio de la Tierra. La flecha indica la situación actual

Este límite lleva el nombre de quien lo descubriera en 1848, el astrónomo y matemático francés Edouard-Albert Roche (1820-1883). Trabajando sobre el tema de las mareas, Roche mostró que cualquier cuerpo sólido que se aproximase a otro cuerpo considerablemente mayor, sufriría unas poderosas fuerzas de marea que, eventualmente, lo destrozaría en fragmentos. Si ambos cuerpos tienen densidad similar, esta distancia es 2.446 veces el radio del planeta. De hecho, esta distancia representa el límite entre los sistemas de anillos y los satélites interiores de los planetas del sistema solar, siendo aproximadamente igual a 175000 km para Júpiter, 147000 km para Saturno, 62000 km para Urano, y 59000 km para Neptuno. Aparentemente, los anillos representan restos que nunca pudieron constituirse en un satélite. El 7 de Julio de 1992 el cometa Shoemaker-Levy 9 se partió en 21 pedazos por

acción de las fuerzas tidales, al sobrepasar el límite de Roche del planeta Jupiter.

El sistema Tierra-Luna se encuentra bien apartado del límite de Roche. De hecho, la situación actual se encuentra cerca del segundo punto de equilibrio, y moviéndose en dirección a él. Este proceso es extremadamente lento. De hecho el día se reduce en apenas 2 milisegundos por siglo. Si este punto se alcanzara, la distancia Tierra-Luna sería aproximadamente la mitad que en la actualidad, con un día (mes) de 48 horas. Este no será, sin embargo, el final de la historia, pues todavía estarán actuando las mareas solares. Estas tenderán a frenar aún más la rotación de la Tierra, llevando a la Luna de nuevo a reducir el radio de su órbita.



Édouard Albert Roche
(Montpellier, 17 de Octubre de 1820 - 18 de Abril de 1883)



Este mecanismo ocurre en todo el sistema solar. Los satélites en órbitas sub-sincrónicas tienen órbitas decadentes en dirección al planeta, mientras que las órbitas supra-sincrónicas se alejan de él. Las lunas de Marte, Fobos y Deimos, caen, respectivamente, en estas dos categorías. Hasta hace poco tiempo se creía que Mercurio y el Sol habían alcanzado un estado final de equilibrio, y que Mercurio siempre mostraba la misma cara al Sol. Pero actualmente se sabe que la relación entre los períodos orbital y de rotación es $3/2$. Su estabilidad depende de la gran excentricidad de la órbita de Mercurio.

16. Hipotesis non fingo (?)

A modo de conclusión, quisiera discutir brevemente el concepto de *fuera*, pero desde un punto de vista histórico. Cuando Newton demostró que la interacción que sostenía a los planetas en órbitas elípticas seguía una ley de cuadrado inverso, se contestó una pregunta, pero surgieron otras. En este esquema del Universo, ya no se consideraba que los planetas se movían en sus órbitas debido a su naturaleza divina o al esfuerzo continuo de los ángeles, como enseñaba la Escolástica, ni porque sus mismas formas esféricas fueran una explicación por sí misma evidente de su movimiento circular, como pensaban Copérnico y -posiblemente- Galileo. Ahora no quedaba ningún agente físico que explicara o hiciera plausible ese movimiento. Kepler había sido uno de los primeros en explorar seriamente la naturaleza del agente que producía este movimiento, adoptando una hipótesis bastante prometedora en aquel entonces. Veamos cual fue.

Desde tiempos inmemoriales se sabía de la atracción del imán por el hierro y de la atracción de objetos livianos por sustancias tales como el vidrio, el lacre o el azufre después de haber sido frotadas con un paño seco. En 1600 William Gilbert (1544 - 1603) publicó un tratado titulado *De Magnete, Magnetisque Corporibus, et de Magno Magnete Tellure* donde discutía precisamente estos fenómenos. En dicha monografía explicaba que, como el imán sólo atrae al hierro, la naturaleza de este efecto, que denominó *magnético*, debía ser distinta que la de los cuerpos electrizados por frotamiento. Tam-

bién concibió a la Tierra como un gigantesco imán.



William Gilbert (Colchester, 1544 - Londres, 30 de Noviembre de 1603) pertenecía a una acomodada familia inglesa. Había estudiado medicina y matemáticas en Cambridge y posteriormente practicó como médico en Londres, alcanzando suficiente renombre como para ser designado médico de la Reina Isabel y, a su muerte en 1603, de su sucesor Jaime I. Su obra *De Magnete* resumía sus quince años de investigaciones experimentales que le consumieron una parte sustancial de su fortuna.



De Magnete fue la obra más importante de Gilbert. Sin embargo, en nuestro caso nos interesa más un segundo libro editado por su hermano, siete años después de su muerte, en base a dos manuscritos. Este libro recibió el título de *De Mundo Nostro Sublunari Philosophia Nova* (1651, Una nueva filosofía de nuestro mundo sublunar). En él, entre otras especulaciones acertadas sobre la rotación de la Tierra, Gilbert imaginó que la gravedad y el movimiento de los planetas podrían explicarse como fenómenos magnéticos. Esta idea, que ya había sido adelantada en *De Magnete*, fue apreciada por Galileo y, posteriormente, llamó la atención de Kepler, cuya rica imaginación pudo representar fuerzas magnéticas que emanaban del Sol para *mantener* a los planetas en sus órbitas.

Kepler estaba equivocado, pero por lo menos fue el primero en considerar al Sol como el agente mecánico de control del movimiento planetario. Otro esquema fue expuesto por Descartes, quien propuso que todo el espacio estaba lleno de un fluido sutil e invisible de corpúsculos materiales. Imaginaba que los planetas estaban atrapados en un inmenso movimiento semejante a un vórtice de este fluido alrededor del Sol. Esta idea fue ampliamente aceptada durante un tiempo.

Newton advirtió que la misma ley de la Gravitación Universal parecía implicar la existencia de una “acción a distancia” entre un cuerpo y otro. Todo era como si los cuerpos pudieran ejercer una interacción entre sí, sin mediar -aparentemente- ningún agente externo. Existen varias sugerencias de que Newton tenía una representación básicamente cartesiana de este efecto, como producido por un éter omnipresente. Por ejemplo en la sección III, pregunta 18 de su “Opticks” sugiere que el calor es “transmitido a través del *vacío* por la vibración de un medio mucho más sutil que el aire, el cual, después de que se ha sacado el aire (como al evacuar un recipiente con una bomba), permanecía en el *vacío*”. Sin embargo, en los Principia prefirió guardar estas ideas para sí, y no aventurar ninguna hipótesis. De hecho, el tono euclidiano del trabajo no se convenía con hipótesis de tono especulativo. De esta manera, al final del Libro II escribió:

Pero hasta aquí no he podido descubrir la causa de esas propiedades de la gravedad a partir de los fenómenos (ob-

servación y experimentación), y no propongo hipótesis... Para nosotros es suficiente que la gravedad realmente exista y actúe de acuerdo a las leyes que hemos explicado, y que abundantemente sirve para explicar todos los movimientos de los cuerpos celestes y de nuestro mar.

Este *Hipotesis non fingo*, es decir, esta cuidadosa omisión de cualquier especulación sobre el agente causante de la interacción gravitatoria, sonó a anatema en su época pero -al decir de Max Born- “... después de que la teoría de Newton ... había sido establecida, la idea de una fuerza actuando directamente a distancia se convirtió gradualmente en un hábito del pensamiento. Pues, en realidad, no es más que un hábito cuando una idea se graba tan fuertemente en las mentes que es usada como principio de explicación”.

La especulación, aún la más fantasiosa, es uno de los factores más dinámicos del progreso científico. En este sentido el *Hipotesis non fingo* newtoniano produjo un efecto muy negativo. Debieron pasar más de 150 años para que se comenzara a cuestionar el “hábito del pensamiento” que veía con naturalidad la acción a distancia de las fuerzas gravitatoria, eléctrica y magnética. Este cambio de actitud ocurrió -tímidamente al principio- de la mano del más grande físico experimental de todos los tiempos, Michael Faraday (1791-1867) quién, para dar una interpretación a sus observaciones sobre la electricidad y el magnetismo, comenzó a utilizar el concepto de *líneas o curvas de fuerza*, un término que ya se había utilizado en relación con el magnetismo a principios del siglo XVII. Sin embargo, influido por la autoridad newtoniana, Faraday daba a entender en sus escritos que las líneas de fuerza eran sólo una herramienta útil. Pero es evidente que usó tanto este concepto que llegó a imaginarlo como algo real. Esta visualización fue reforzada por ciertos trabajos publicados entre 1847 y 1854 por William Thomson (Lord Kelvin) donde se llamaba la atención sobre la analogía entre las líneas de fuerzas electrostáticas y magnéticas, y las líneas de flujo en un fluido.

Los trabajos experimentales de Young, Fresnel y otros habían demostrado que la luz se comportaba como una onda, y muchos sospechaban que debía haber una conexión de la luz con la electricidad y el magnetismo.



El mismo Faraday había demostrado experimentalmente que una fuerza magnética podía rotar el plano de polarización de la luz. Esto lo llevó a sostener que la luz podría ser una oscilación transversal de las líneas de fuerza magnética. A partir de esta idea, Faraday comenzó a cuestionarse el concepto de acción a distancia, y a preguntarse si las fuerzas eléctricas y magnéticas no necesitarían cierto tiempo de propagación, posiblemente igual a la velocidad de la luz. Sus últimas investigaciones -que nunca completó- estaban referidas a esta cuestión. Nunca sabremos cómo se proponía atacar este problema. Sólo dejó algunos piñones, ruedas delicadas y espejos.



Michael Faraday (22 de Setiembre de 1791 - 25 de Agosto de 1867)

Esta idea fue finalmente retomada por James Clerk Maxwell quien, basándose en el concepto de línea de fuerza de Faraday y en la analogía matemática de Thomson desarrolló el concepto de “campo”. Los términos “campo eléctrico” y “campo magnético” aparecen en los primeros dos trabajos escritos por Maxwell sobre el tema en 1856 y 1861. En 1865 publicó la versión final de su teoría:

Yo he preferido buscar una explicación [de los fenómenos eléctricos y magnéticos] suponiéndolos producidos por acciones que continúan en el medio circundante así como en los cuerpos excitados y tratando de explicar la acción entre cuerpos distantes sin suponer la existencia de fuerzas capaces de actuar directamente a distancia. La teoría que propongo puede, por lo tanto, ser llamada teoría del “Campo electromagnético” [...]



James Clerk Maxwell

James Clerk Maxwell (Edimburgo, 13 Nov. 1831 - 5 Nov 1879)



La aceptación general de esta teoría hacia el final del siglo XIX marcó la transición del concepto de acción a distancia a la presente idea de “campo”. En este contexto, era natural imaginar que el campo gravitatorio debía tener un status muy especial, en tanto que la masa gravitatoria era idéntica a la masa inercial. Muchos físicos y matemáticos del siglo pasado entendieron que esto no podía ser casual. Finalmente, en las primeras décadas del siglo XX, Einstein vio en esta igualdad la clave inicial para el desarrollo de su Teoría de la Relatividad General. Pero esa es otra historia...

Notas

¹Posiblemente se refiere a su invención de la bobina o muelle usado en el volante de los relojes

²Una molécula diatómica cuyos dos núcleos son distintos se denomina heteronuclear. En este caso la molécula puede formarse por un mecanismo llamado de ligadura *iónica*. La molécula de sal NaCl es un ejemplo típico. Por un efecto cuántico, es energéticamente más conveniente que un electrón de valencia del Sodio se desplace en dirección al Cloro para formar dos iones de carga opuesta Na^+ y Cl^- que se atraen entre sí. El resultado es una molécula que tiene una distribución de carga no simétrica, y que por lo tanto está polarizada. Existe otro mecanismo de ligadura denominado *covalente*. donde, básicamente, los electrones de valencia tienden a ubicarse preferentemente entre ambos núcleos actuando así como un *cemento* que tiende a juntar-

los. Este es el único mecanismo que puede actuar en el caso de moléculas homonucleares. En una descripción clásica, este efecto *ligante* no alcanzaría a compensar la repulsión entre los núcleos. Esto sólo ocurre como resultado de efectos cuánticos denominados de *intercambio* y *solapamiento*. La energía potencial resultante para la interacción entre los núcleos tiene un aspecto semejante al correspondiente a la ligadura *iónica*, con el efecto de atracción producido por los electrones dominando a distancias intermedias, y la repulsión electrostática entre los núcleos a distancias menores. En general la situación es más complicada, y la mayoría de las ligaduras de las moléculas heteronucleares no son ni totalmente iónicas ni totalmente covalentes.

³También llamado “potencial cuadrupolar eléctrico”, para distinguirlo del caso “magnético” que no estudiaremos en este curso

⁴L. G. Christophorou and E. Illenberger, *Phys. Lett. A* **173** 78 (1983).

⁵P. Langevin: “Une formule fondamentale de théorie cinétique” (*Annales de chimie et de physique*), Serie 8, **5**, pags. 245 - 288 (1905).

⁶*The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, vol. II (editado por W. D. Niven), pags. 26 - 78 (Dover, New York, 1952).

⁷*Trans. Faraday Soc.* **33** 222.

⁸Una consecuencia de que la superficie de la Tierra es aproximadamente una equipotencial, es que la gravedad apunta siempre en una dirección perpendicular a la superficie terrestre. En otras palabras, una plomada apunta siempre “hacia abajo” en lugar de hacia el centro de la Tierra.

